МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.3 DOI 10.12737/10371

Сравнение точных решений контактных задач для трансверсально изотропного полупространства*

Д. А. Пожарский[1], Д. Б. Давтян[2]**

[1,2]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Comparison of contact problem exact solutions for transversely isotropic half-space***

D.A. Pozharskiy[1], D.B. Davtyan[2]**

[1,2]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Проведено сравнение точных решений двух контактных задач с неизвестной областью контакта о внедрении эллиптических штампов в трансверсально изотропное упругое полупространство. В первой задаче, названной «традиционной», граница полупространства параллельна плоскостям изотропии. Здесь возможна осевая симметрия для кругового штампа. Во второй задаче, названной «нетрадиционной», граница полупространства перпендикулярна плоскостям изотропии. Здесь осевая симметрия в принципе невозможна: даже для кругового штампа область контакта эллиптическая. Для обеих задач сравнены силы, требуемые для внедрения штампа на заданную величину, и площади возникающих областей контакта. Модель трансверсально изотропного тела применяется для описания многих востребованных в технике и промышленности материалов, параметры упругости которых измерены в последние десятилетия: композиты, керамика, углеволокно, эпоксидный графит, эпоксидное стекло, древесина, состаренные бетоны, некоторые металлы (титан, кобальт, цинк), ряд полупроводников и горных пород.

Ключевые слова: теория упругости, контактные задачи, трансверсально изотропное полупространство, точное решение.

Exact solutions to two contact problems with unknown contact domains on the elliptic punch penetration in the transversely isotropic elastic half-space are compared. In the first one – a “traditional problem” – the half-space boundary is parallel to the isotropy planes. There can be an axial symmetry case for a circular punch. In the second – a “nontraditional problem” – the half-space boundary is perpendicular to the isotropy planes. Here, the axial symmetry is impossible in principle: even for a circular punch, the contact domain will be elliptical. The contact domains and the forces required for the penetration of the punch at a given value are compared for both problems. The transversely isotropic body model is applicable for describing lots of materials which elastic parameters have been measured in recent decades: composites, ceramics, carbon fiber, graphite-epoxy, glass-epoxy, wood, aged concretes, some metals (titanium, cobalt, zinc), some semiconductors and rocks. They are widely used in the engineering and industry.

Keywords: elasticity theory, contact problems, transversely isotropic half-space, exact solution.

Введение. Пионером в области исследования трансверсально изотропных тел считается Эллиот [1, 2]. В контактных задачах теории упругости для трансверсально изотропного полупространства традиционно рассматривался случай, когда область контакта параллельна плоскостям изотропии [3, 4]. Случай, когда область контакта или трещины перпендикулярна плоскостям изотропии, назван «нетрадиционным» [5, 6]. В случае «нетрадиционной» ориентации плоскостей изотропии рассматривались задачи для полосовой, клиновидной, эллиптической и заранее неизвестной областей контакта [7–10].

* Работа выполнена по теме № 1.6.14 в рамках выполнения госзадания Минобрнауки РФ в части НИР.

**e-mail: pozharda@rambler.ru, d_davtyan@bk.ru

*** The research is done on 1.6.14 theme within the frame of the government task of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in R&D.

Контактные задачи. Рассмотрим сперва «нетрадиционный» случай контактной задачи о вдавливании эллиптического в плане штампа в трансверсально изотропное полупространство $x \geq 0$, граница которого перпендикулярна плоскостям изотропии z=const (на рис. 1 штамп вдавливается сбоку).

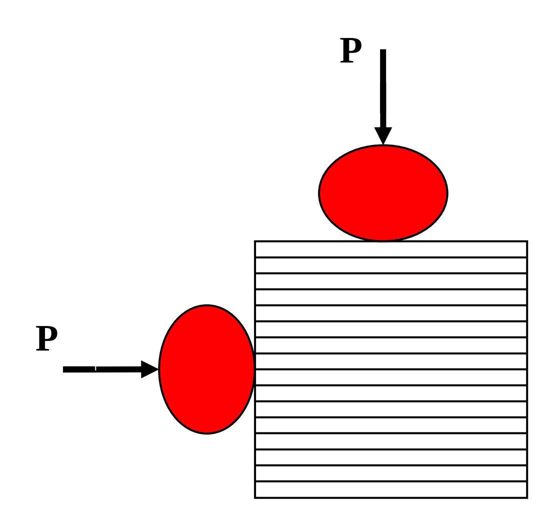


Рис. 1. «Традиционная» и «нетрадиционная» контактные задачи

Пусть основание штампа в области контакта описывается функцией

$$f(y,z) = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2}. \tag{1}$$

Штамп вдавливается без перекоса центрально приложенной силой P, испытывая осадку δ. При заданной функции (1) и осадке δ требуется определить область контакта Ω, контактное давление $q(y,z)$ в области Ω и силу P. На основании фундаментального решения [5] интегральное уравнение (ИУ) контактной задачи можно записать в форме

$$\iint\limits_{\Omega} q(y_0, z_0) K(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = \delta - f(y,z), \quad (y,z) \in \Omega, \tag{2}$$

$$K(y,z) = \frac{(m_2 - m_1)\gamma_3^2}{4\pi^2 A_{66}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2}{D} \zeta_1 \zeta_2 \exp(-iz\xi - iy\eta) d\xi d\eta,$$

$$D = m_2 h_1^2 \zeta_2 - m_1 h_2^2 \zeta_1 - 4(m_2 - m_1)\eta^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3,$$

$$\zeta_n = \sqrt{\gamma_n^2 \xi^2 + \eta^2} \quad (n = 1,2,3), \quad h_l = (m_l + 1)\gamma_3^2 \xi^2 + 2\eta^2 \quad (l = 1,2).$$

Здесь величины γ_n, m_l зависят от упругих параметров A_{ij} [5], γ_1^2, γ_2^2 являются корнями уравнения

$$\gamma^4 A_{11} A_{44} - \gamma^2 [A_{11} A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})] + A_{33} A_{44} = 0, \tag{3}$$

$$\gamma_3^2 = \frac{A_{44}}{A_{66}}, \quad m_1 = \frac{A_{11}\gamma_1^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad m_2 = \frac{A_{11}\gamma_2^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}.$$

Для случая (1) точное решение ИУ (2) имеет в вид [5]

$$q(y,z) = q_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2}}, \quad P = \iint\limits_{\Omega} q(y,z) dy dz = \frac{2\pi}{3} ab q_0, \tag{4}$$

$$\delta = a q_0 \frac{(m_1 - m_2)\gamma_3^2}{8A_{66}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\zeta_1(\theta)\zeta_2(\theta)\cos^2\theta d\theta}{D(\theta)[(a/b)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta]^{1/2}}, \tag{5}$$

$$\frac{b^2}{2R_1} + \frac{a^2}{2R_2} = \delta, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{c}{d}, \tag{6}$$

$$c=\int_0^{2\pi}\frac{\zeta_1(\theta)\zeta_2(\theta)\cos^4\theta d\theta}{D(\theta)[(a/b)^2\cos^2\theta+\sin^2\theta]^{3/2}},$$

$$d=\int_0^{2\pi}\frac{\zeta_1(\theta)\zeta_2(\theta)\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta}{D(\theta)[(a/b)^2\cos^2\theta+\sin^2\theta]^{3/2}},$$

$$\zeta_n(\theta)=\sqrt{\gamma_n^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}\quad (n=1,2,3),$$

$$D(\theta)=m_1h_2^2(\theta)\zeta_1(\theta)-m_2h_1^2(\theta)\zeta_2(\theta)-4(m_1-m_2)\sin^2\theta\zeta_1(\theta)\zeta_2(\theta)\zeta_3(\theta),$$

$$h_l(\theta)=(m_l+1)\gamma_3^2\cos^2\theta+2\sin^2\theta\quad (l=1,2).$$

При заданных величинах δ, R_1, R_2 отношение полуосей эллипса контакта a/b определяется из второго соотношения (6). Затем величина a находится из первой формулы (6), величина q_0 — из (5). Вдавливающая сила рассчитывается по второй формуле (4).

В традиционном (классическом) случае контактной задачи для трансверсально изотропного полупространства (на рис. 1 штамп вдавливается сверху) ИУ контактной задачи имеет вид (формулы (4.1.24), (7.1.16) в [4])

$$\iint_\Omega \frac{q(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}dx_0dy_0=2\pi\theta[\delta-f(x,y)],\quad (x,y)\in\Omega, \tag{7}$$

$$\theta=\frac{A_{11}A_{33}-A_{13}^2}{(\gamma_1+\gamma_2)A_{11}}. \tag{8}$$

Здесь δ — осадка штампа под действием силы P; $f(x,y)$ — функция, описывающая форму основания штампа; Ω — область контакта; $q(x,y)$ — контактное давление в области Ω; γ_1, γ_2 — корни характеристического уравнения (3) (с положительной вещественной частью). Уравнение (7) отличается от ИУ контактной задачи для изотропного полупространства только контактной жесткостью θ. Полагая в формуле (8) (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона)

$$A_{11}=A_{33}=\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu},\quad A_{13}=\frac{2G\nu}{1-2\nu},\quad \gamma_1=\gamma_2=1, \tag{9}$$

получим известное выражение контактной жесткости для изотропного случая:

$$\theta=\frac{G}{1-\nu}.$$

Для случая эллиптического параболоида

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2R_1}+\frac{y^2}{2R_2},\quad R_1\ge R_2, \tag{10}$$

точное решение ИУ (7) выражается через полные эллиптические интегралы

$$K(e)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\quad E(e)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad D(e)=\frac{K(e)-E(e)}{e^2}$$

и имеет вид [4, с. 210–212], сравните с формулами (4)–(6),

$$q(x,y)=q_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad P=\iint_\Omega q(y,z)dydz=\frac{2\pi}{3}abq_0, \tag{11}$$

$$\delta=\frac{bq_0}{2\theta}K(e),\quad e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}, \tag{12}$$

$$\frac{a^2K(e)}{2R_1D(e)} = \delta, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{K(e)-E(e)}{(1-e^2)D(e)}. \tag{13}$$

При заданных величинах δ, R_1, R_2 величина e (12) и отношение полуосей эллипса контакта a/b определяются из второго соотношения (13). Затем величина a находится из первой формулы (13), величина q_0 — из первой формулы (12). Вдавливающая сила рассчитывается по второй формуле (11).

Имея решения для двух случаев контактной задачи, изображенных на рис. 1, сравним в этих решениях значения сил, необходимых для вдавливания штампа на одну и ту же величину, а также отношения сил к площади контакта. Допустим, что области контакта находятся в квадратах со стороной h. В «традиционной» контактной задаче введем безразмерные величины (штрихи затем опускаем)

$$x' = \frac{x}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad \delta' = \frac{\delta}{h}, \quad A = \frac{h}{2R_1}, \quad B' = \frac{h}{2R_2}, \quad a' = \frac{a}{h}, \quad b' = \frac{b}{h}, \tag{14}$$

$$q'(x', y') = \frac{q(x,y)}{2\pi\theta}, \quad q_0 = \frac{q_0}{2\pi\theta}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta h^2} \tag{15}$$

и рассмотрим ниже случай кругового штампа: δ=A=B=1. Тогда на основании формул (11)–(15) безразмерное решение осесимметричной контактной задачи имеет вид

$$q(x,y) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{1-2x^2-2y^2}, \quad P = \iint_\Omega q(x,y)dxdy = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}. \tag{16}$$

В «нетрадиционной» контактной задаче введем безразмерные величины (штрихи затем опускаем)

$$y' = \frac{y}{h}, \quad z' = \frac{z}{h}, \quad \delta' = \frac{\delta}{h}, \quad A = \frac{h}{2R_1}, \quad B' = \frac{h}{2R_2}, \quad a' = \frac{a}{h}, \quad b' = \frac{b}{h}, \tag{17}$$

$$q'(x', y') = \frac{q(x,y)}{A_{66}}, \quad q_0' = \frac{q_0}{A_{66}}, \quad P' = \frac{P}{A_{66}h^2}. \tag{18}$$

Тогда на основании формул (1), (4)–(6), (17), (18) безразмерное решение имеет вид

$$q(y,z) = q_0\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}}, \quad P = \iint_\Omega q(y,z)dydz = \frac{2\pi}{3}abq_0, \tag{19}$$

$$\delta = aq_0\frac{(m_1-m_2)\gamma_3^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta_1(\varphi)\zeta_2(\varphi)\cos^2\varphi d\varphi}{D(\varphi)[(a/b)^2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi]^{1/2}}, \tag{20}$$

$$Ab^2 + Ba^2 = \delta, \quad \frac{B}{A} = \frac{c}{d}. \tag{21}$$

Также рассмотрим случай кругового штампа: δ=A=B=1. Из формул (8), (15), (16), (18) и (19) заключаем, что отношение размерной силы P=P_1 («традиционный» случай) к размерной силе P=P_2 («нетрадиционный» случай) для кругового штампа находится по формуле

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi abq_0}\cdot\frac{A_{11}A_{33}-A_{13}^2}{(\gamma_1+\gamma_2)A_{11}A_{66}}, \tag{22}$$

где a, b и q_0 находятся по формулам (20)–(21) при δ=A=B=1.

Важную роль играет отношение T=P/S силы P к площади контакта S. Из формул (16), (19) и (22) заключаем, что для кругового штампа отношение T=T_1 для «традиционного» случая связано с отношением T=T_2 для «нетрадиционного» случая по формуле

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi q_0}\cdot\frac{A_{11}A_{33}-A_{13}^2}{(\gamma_1+\gamma_2)A_{11}A_{66}}, \tag{23}$$

при этом a, b и q_0 находятся по формулам (20)–(21) при δ=A=B=1.

В табл. 1 для ряда материалов приведены результаты расчетов по формулам (20)–(23) при δ=A=B=1.

В [7] введено понятие жесткости поверхности «нетрадиционного» трансверсально изотропного полупространства вдоль осей координат. Анализ данных табл. 1 показывает, что обычно $P_1>P_2$ и $T_1>T_2$, если поверхность материала более жесткая в направлении оси y (исключения: Al_2O_3, SiC, бетон, состаренный циклами нагрев-холод). Кроме того, как правило, $P_1<P_2$ и $T_1<T_2$, если поверхность материала более жесткая в направлении оси z. Изменение площади контакта при изменении направления вдавливания для материалов из табл. 1 незначительно и поэтому отличие отношения T_1/T_2 от отношения вдавливающих сил невелико (см. две последние колонки табл. 1).

Таблица 1

Значения характеристик (безразмерные)

Материал	$\varepsilon=a/b$	a	b	q_0	P_1/P_2	T_1/T_2
Al_2O_3	1,00	0,708	0,706	2,46	1,06	1,06
Co	0,958	0,692	0,722	2,85	1,20	1,20
Mg	0,992	0,704	0,710	2,60	1,04	1,04
SiC	1,02	0,715	0,699	2,10	1,00	1,00
Ti	0,934	0,683	0,731	3,01	1,22	1,21
CdS	0,984	0,701	0,713	2,94	1,10	1,10
GaS	1,32	0,796	0,605	1,81	0,255	0,245
GaSe	1,21	0,771	0,637	1,99	0,381	0,374
ZnO	0,988	0,703	0,712	2,86	1,04	1,04
Углеволокно	0,764	0,607	0,795	3,88	5,60	5,41
Графит	2,09	0,902	0,432	1,71	0,0110	0,00856
Сапфир	1,01	0,710	0,704	2,36	0,992	0,992
Древесина	0,971	0,697	0,717	2,96	1,49	1,49
Керамика PZT-4	1,03	0,719	0,696	2,72	0,852	0,852
Композит (60% волокон)	0,852	0,649	0,761	3,23	4,48	4,42
Бедренная кость человека	0,962	0,693	0,721	3,39	1,20	1,20
Сырая бычья бедренная кость	0,950	0,689	0,725	2,99	1,49	1,49
Эпоксидное стекло	0,940	0,685	0,729	2,73	2,04	2,03
Эпоксидный графит	0,842	0,644	0,765	3,26	4,76	4,69
Гнейс влаго-пропитанный (минерал)	1,09	0,737	0,676	2,42	0,749	0,747
Бетон, состарен химически	0,972	0,697	0,717	2,17	1,17	1,17
Бетон, состарен циклами нагрев-холод	0,972	0,697	0,717	2,35	0,953	0,952

Заключение. Сравнение точных решений пространственных контактных задач для трансверсально изотропного полупространства важно для интерпретации результатов численных решений для конического, пирамидального и др. штампов. С практической точки зрения оба точных решения важны, например, при расчете контактной прочности выработок горных пород.

Библиографический список

1. Elliot, H. A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal crystals / H. A. Elliot // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. — 1948. — Vol. 44. — P. 522–533.

2. Elliot, H. A. Axial symmetric stress distributions in aeolotropic hexagonal crystals. The problem of plane and related problems / H. A. Elliot // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. — 1949. — Vol. 45. — P. 621–630.

3. Грилицкий, Д. В. Осесимметричная контактная задача термоупругости для трансверсально изотропного полупространства / Д. В. Грилицкий, Б. Г. Шелестовский // Прикладная механика. — 1970. — Т. 6, № 8. — С. 3–8.

4. Ding, H. Elasticity of transversely isotropic materials / Haojiang Ding, Weiqiu Chen, L. Zhang. — Dordrecht : Springer, 2006. — 435 p.

5. Fabrikant, V. I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space / V. I. Fabrikant // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 2011. — V. 64, № 2. — P. 151–170.

6. Fabrikant, V. I. Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body / V. I. Fabrikant // European Journal of Mechanics A / Solids. — 2011. — Vol. 30. — P. 902–912.

7. Давтян, Д. Б. Действие полосового штампа на трансверсально изотропное полупространство / Д. Б. Давтян, Д. А. Пожарский // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т. 76, вып. 5. — С. 783–794.

8. Пожарский, Д. А. Клиновидный штамп на трансверсально изотропном полупространстве / Д. А. Пожарский, Д. Б. Давтян, Е. А. Артамонова // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2013. — № 1. — С. 31–33.

9. Пожарский, Д. А. Трехмерная контактная задача для трансверсально изотропного тела / Д. А. Пожарский, Д. Б. Давтян // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 7/8. — С. 22–26.

10. Давтян, Д. Б. Действие эллиптического штампа на трансверсально изотропное полупространство / Д. Б. Давтян, Д. А. Пожарский // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2014. — № 5. — С. 117–126.

References

1. Elliot, H.A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal crystals. Proceedings of Cambridge Philosophical Society, 1948, vol. 44, pp. 522–533.

2. Elliot, H.A. Axial symmetric stress distributions in aeolotropic hexagonal crystals. The problem of plane and related problems. Proceedings of Cambridge Philosophical Society,1949, vol. 45, pp. 621–630.

3. Grilitskiy, D.V., Shelestovskiy, B.G. Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha termouprugosti dlya transversal'no izotropnogo poluprostranstva. [The axisymmetric contact problem of thermoelasticity for a transversely isotropic half-space.] Prikladnaya mekhanika, 1973, vol. 6, iss. 8, pp. 3-8 (in Russian).

4. Ding, Haojiang; Chen, Weiqiu; Zhang, L. Elasticity of transversely isotropic materials. Dordrecht : Springer, 2006, 435 p.

5. Fabrikant, V. I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2011, vol. 64, no. 2, pp. 151–170.

6. Fabrikant, V. I. Non-traditional crack problem for transversely-isotropic body. European Journal of Mechanics - A / Solids, 2011, vol. 30, pp. 902–912.

7. Davtyan, D.B., Pozharskiy, D.A. Deystvie polosovogo shtampa na transversal'no izotropnoe poluprostranstvo. [The action of a strip punch on a transversely isotropic half-space.] Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 783–794 (in Russian).

8. Pozharskiy, D.A., Davtyan, D.B., Artamonova, E.A. Klinovidnyy shtamp na transversal'no izotropnom poluprostranstve. [Wedge-shaped punch on a transversely isotropic half-space.] Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. 2013, no. 1, pp. 31–33 (in Russian).

9. Pozharskiy, D.A., Davtyan, D.B. Trekhmernaya kontaktnaya zadacha dlya transversal'no izotropnogo tela. [Three-dimensional contact problem for a transversely isotropic solid.] Vestnik of DSTU, 2013, no. 7/8, pp. 22–26 (in Russian).

10. Davtyan, D.B., Pozharskiy, D.A. Deystvie ellipticheskogo shtampa na transversal'no izotropnoe poluprostranstvo. [Action of an elliptic punch on a transversally isotropic half-space.] Mechanics of Solids, 2014, no. 5, pp. 117–126 (in Russian).

Поступила в редакцию 25.10.2014
Сдана в редакцию 06.11.2014
Запланирована в номер 28.01.2015